COLÉGIO ARNALDO
Unidade Anchieta
Unidade Funcionários

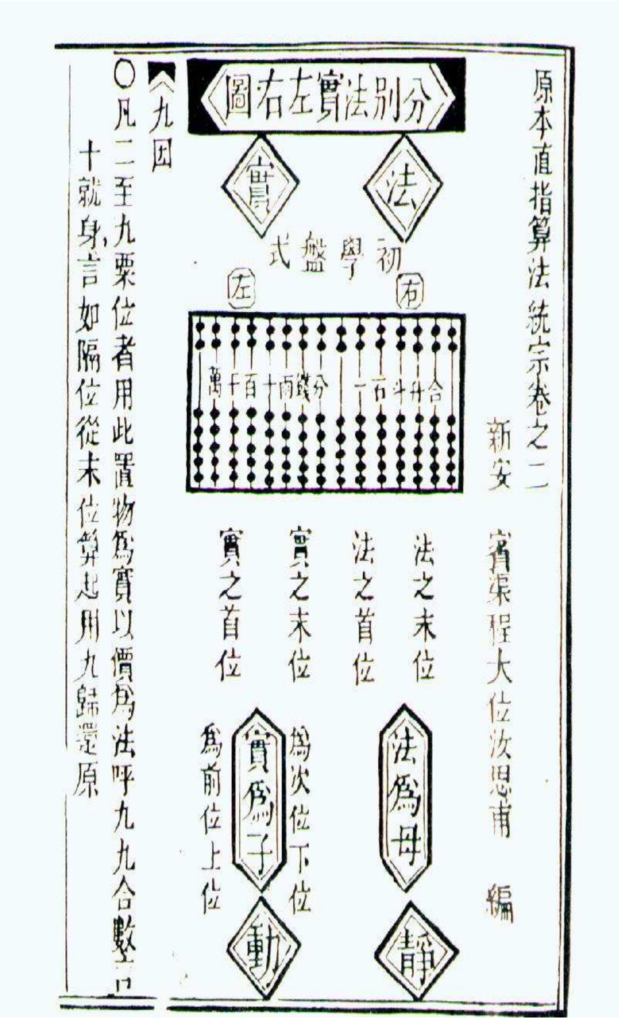
ATIVIDADE PROGRAMADA SOBRE

DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

2ª SÉRIE
ENSINO MÉDIO

Prof. Rogério Rodrigues

NOME : ....NÚMERO : .... TURMA : ....



Uma representação primitiva do ábaco de 1.593 .

A MATEMÁTICA NA CHINA

O livro chinês , considerado o mais antigo e que trata de matemática é o *Chou Pei Suang Ching* , uma obra escrita na forma de um diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário ; o ministro diz ao príncipe que a arte dos números deriva do quadrado e do círculo , o quadrado pertencente à Terra e o círculo , pertencente aos céus. Estima-se que o *Chou Pei* foi escrito por vários autores em aproximadamente 1.200 a.C. Quase tão antigo quanto o *Chou Pei* é o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática* . Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração , agricultura , sociedade , engenharia , impostos , cálculos , soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos, inclusive utilizações algébricas do Teorema de Pitágoras , numa antecipação de quase 1.000 anos . Um dos problemas resolvidos no *Nove capítulos* é a resolução de um sistema de equações lineares pelo método que hoje conhecemos por *escalonamento* . Essa resolução se baseia em *matrizes* , naquele tempo originadas dos famosos quadrados mágicos .

Os quadrados mágicos , de acordo com os manuscritos chineses eram considerados instrumentos divinos e o primeiro deles registrado historicamente é o quadrado

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Observe que a soma dos números em linha , coluna ou diagonal é sempre igual a 15 . Segundo a lenda , esse quadrado foi trazido para os homens por uma tartaruga do *Rio Lo* nos dias do lendário imperador *Yii* , considerado um engenheiro hidráulico na época . A preocupação com tais quadrados , na verdade matrizes , é que levou o autor dos *Nove capítulos* a resolver o sistema $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$, efetuando operações sobre a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{bmatrix}$ em suas linhas e colunas de modo a reduzí-la a $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{bmatrix}$ e o sistema a $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$, cuja solução é terno ordenado $\left(\frac{107}{12}, \frac{19}{4}, \frac{11}{4} \right)$, onde o valor de x é o primeiro elemento , o valor de y é o segundo elemento e o valor de z é o terceiro elemento .

Muito mais tarde , já no século XVIII , um matemático escocês , Colin Maclaurin descobriu que qualquer sistema linear pode ser resolvido através de operações simples envolvendo as linhas e colunas da matriz que a ele se associa . Mas foi Gabriel Cramer (1.704 – 1.752) quem publicou pela primeira vez esse método , então conhecido como *Regra de Cramer* . Observe a resolução do sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ pelo *escalonamento* conduzindo à regra de Cramer .

→ Matriz completa relacionada ao sistema : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Se multiplicarmos a primeira linha por d e a segunda linha por – a , teremos a matriz $\begin{bmatrix} ad & bd & cd \\ -ad & -ae & -af \end{bmatrix}$. Conservando a primeira linha e transformando a segunda através da sua soma com a primeira , teremos $\begin{bmatrix} ad & bd & cd \\ 0 & bd - ae & cd - af \end{bmatrix}$ que equivale ao sistema abaixo $\begin{cases} adx + bdy = c \\ (bd - ae)y = cd - af \end{cases}$ onde $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$ e $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$.

→ Regra de Cramer para um sistema de 2 incógnitas :

Dado um sistema do tipo $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, definimos $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$ e $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$, onde os numeradores e denominadores são chamados de *determinantes* e são calculados do seguinte modo :

- $D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$ (Matriz dos coeficientes de x e y)
- $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$ (Na matriz acima , trocar a coluna de x pela de termos independentes)
- $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$ (Na primeira matriz , trocar a coluna de y pela de termos independentes)

Então $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$, $D \neq 0$.

A regra de Cramer definiu o que chamamos de *determinante* , número calculado com os elementos da matriz associada ao sistema . No caso anterior , mostramos que o determinante 2X2 é calculado fazendo (produto dos elementos da diagonal principal) – (produto dos elementos da diagonal secundária) .

A regra de Cramer pode ser generalizada para qualquer sistema m X n , mas os determinantes poderão ser calculados de modos diferentes . A regra de Sarrus , por exemplo , serve para calcular o determinante 3 X 3 . Mas o teorema conhecido como *Teorema de Laplace* permitirá calcular qualquer determinante , independente de sua ordem . Veja a seguir as definições e procedimentos relacionados ao *Teorema de Laplace..*

1º) Menor complementar de um elemento a_{ij} numa matriz quadrada é o determinante que se obtém excluindo-se a linha e a coluna do elemento .
2º) Cofator de um elemento numa matriz é o resultado da expressão

$$\mathbf{cof\ (a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}}$$

onde $\mathbf{A_{ij}}$ é a menor complementar do elemento $\mathbf{a_{ij}}$.

3º) Teorema de Laplace : O determinante de uma matriz é a soma dos elementos de uma fila (linha ou coluna) multiplicados pelos respectivos cofatores .

<u>Exemplo</u> : Calcular o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Resolução</u> :

a) Devemos , inicialmente , escolher uma das filas ; seja a primeira linha .

b) $D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1.(2+3) -1(0+4) +$
$+ 2 \cdot (0 - 8) = 5 - 4 - 16 = -15$.

* texto de Rogério Rodrigues

****

Referência bibliográfica : *Boyer , Carl B. , História da Matemática (São paulo , Ed. Edgard Blücher Ltda.)*